

## **JEODEZİK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI**

Veli AKARSU<sup>1</sup>, Mehmet Güven KOÇAK<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ZKÜ Zonguldak Meslek Yüksekokulu Teknik Programlar Bölümü, 67100 ZONGULDAK,  
e-mail: vakarsu@mynet.com

<sup>2</sup>ZKÜ Mühendislik Fakültesi Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü, 67100  
ZONGULDAK, e-mail: mgkxyz@yahoo.de

**Özet :** *En Küçük Kareler Yöntemi (EKKY)'nin Gauss – Markoff modeline uygulanarak elde edilen jeodezik denklem sisteminin (normal denklem sistemi, NDS) çözümü jeodezinin uzun yıllar önemli problemlerinden biri olmuştur. Bunda en önemli etken hesaplama araçlarının kapasite ve yoğun veri işlemedeki yetersizlikleriydi. Bugün için modern bilgisayarların ve bunların hızlı veri işleme yeteneklerinin geliştirilmesi, sorunu kısmen çözmesi yanında bazı problemleri de beraberinde getirmiştir. NDS'nin çözümü için direkt ve iteratif yöntemler kullanılabilir. Ayrıca NDS'de sıfırların yoğun olması gibi özel durumlarda, denklemler bant denklemler haline dönüştürülür. Bant denklem sistemleri "sparse" sistemler olarak da adlandırılır. Bu sistemlerin kendilerine özgü çözüm yöntemleri vardır. NDS'nin bilgisayar ortamında çözümü için kullanılacak yöntemin seçiminde; yöntemin uygulanmasıyla yapılacak aritmetik işlemlerin sayısı, stabil sonuçlar üretmesi gibi kriterler karşılaştırmada kullanılır. Bu çalışmada 300 noktadan oluşan ve tüm kenarları ölçülmüş gibi simule edilmiş bir jeodezik ağa ait normal denklem sisteminin direkt yöntemlerle çözümleri zaman ve hesaplanacak büyüklüklerin sayısal değerleri bakımından karşılaştırılmıştır.*

### **1. GİRİŞ**

Normal denklem sistemi, En Küçük Kareler Metodu'nun, Jeodezide gözlemler ile tahmin edilmesi gereken bilinmeyenler arasındaki fonksiyonu ve ölçülerin stokastikliğini veren Gauss-Markoff Modeli (GMM)'ne uygulanması ertesinde;

$$(\underline{A}^T \underline{P} \underline{A}) \underline{x} = \underline{A}^T \underline{P} \underline{l} \quad (1)$$

şeklinde elde edilir. (1) eşitliğinde geçen

$\underline{A}$  : Düzeltme denklemlerinde bilinmeyenlere ait ( $n \times u$ ) boyutlu katsayılar matrisi,

$\underline{P}$  : Ölçülere ait ağırlık matrisi,

$\underline{l}$  : Küçültülmüş ölçüler vektörüdür.

(1) eşitliğinin sol tarafında parantez içinde verilen terim, normal denklemler bilinmeyenlerine ait katsayılar matrisi ( $\underline{N}$ ) ve eşitliğin sağ tarafı ise yalın terimler vektörü ( $\underline{n}$ ) olarak adlandırılır.  $\underline{x}$  bilinmeyenler vektörünün elde edilebilmesi için normal denklem sisteminin tersinin hesaplanması gerekmektedir. Bu, sadece çözüm vektörünün değil aynı zamanda bu vektöre ait elemanların doğruluklarının elde edilebilmesi için de zaruridir. Küçük boyutlarda bu sistemin inversini elde etmek çok

problemlidir. Ancak boyut büyüdükçe sistemin stabilitesinin, yani çözümün güvenilirliği sorgulanmalıdır.

GMM’nde kestirilmesi gereken büyüklükler, yani bilinmeyenler ve bunların varyans-kovaryans matrisinin elde edilmesinde matematikte lineer denklem sistemlerinin çözümünde olduğu gibi bir çok yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemler direkt ve iteratif yöntemler olarak bilinir. Direkt yöntemlerde aranan büyüklükler, doğrudan veya rekursif bir algoritma olmadan hesaplanabilirler. İteratif yöntemlerde ise seçilen yaklaşık değerlerin iyi seçilip seçilmediğine bakılmaksızın sistemin çözümüne tek bir adımda değil birden çok adım sonrasında ulaşılır. İteratif yöntemler normal denklem sisteminin inversinin aranmadığı durumlarda direkt yöntemlere alternatif olarak kullanılabilir. Zira direkt yöntemlerde  $n^3$ ’ün katları kadar aritmetik işlem gerekirken, iteratif yöntemlerde bu sayı  $n^2$ ’dir. Örneğin 1000 bilinmeyenli bir ağda işlem sayısını için gerekli süre 1000 kat azalmaktadır.

Büyük boyutlu ağlarda normal denklemlerin elde edilmesi de ayrı bir problem olmaktadır. Çünkü fonksiyonel modelin katsayılar matrisinde sıfırlı eleman, sıfırdan farklı elemanların sayısından oldukça fazladır.

Bu çalışmada yukarıda bahsedilen bilgi ve problemler dikkate alınarak direkt yöntemlerin ne oldukları ve özel bir duruma sahip seçilen büyük bir ağda normal denklemlerin kısa sürede oluşturma yöntemi sunulmuştur. Ayrıca normal denklemlerin direkt yöntemlerle çözümleri, zaman ve stabilite bakımından karşılaştırılmıştır.

## 2. JEODEZİK NDS’NİN YAPISAL ÖZELLİKLERİ

Normal denklem katsayılar matrisi  $\underline{N}$  bir kare matris olup, ana köşegene göre  $\underline{N} = \underline{N}^T$  şeklinde simetriktir. Bu özellik çözüm yöntemlerinin önemli derecede sadeleşmelerini sağlar. Normal denklem sisteminin katsayılar matrisine ait karesel form,  $\underline{x}^T \underline{N} \underline{x} > 0$  şeklinde daima pozitif definitdir. Yani,  $\underline{N}$  matrisinin ana köşegen elemanlarının genellikle pozitif olması, ana köşegen dışındaki elemanlarının kareleri  $n_{ik}^2$  ile köşegen üzerindeki  $n_{ii}$  ve  $n_{kk}$  elemanları arasında  $n_{ik}^2 < n_{ii} \times n_{kk}$  eşitsizlik ilişkisinin bulunmasına ve  $\underline{N}$ ’nin her satırındaki mutlak değerce en büyük elemanın ilgili satırının ana köşegeni üzerinde bulunmasını sağlar. Bu özellik çözüm yöntemlerinin uygulanmasında pivotlama yapma zorunluluğunu ortadan kaldırır. Normal denklem katsayılar matrisinin her satırındaki ana köşegen üzerindeki elemanın sayısal değeri, elemanların mutlak değerleri toplamının sayısal değerinden büyükse köşegen dominantlık belirgindir denir.

Bu özellik

$$|n_{ii}| > \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^n |n_{ik}|, \quad i = 1, 2, \dots, n = \overline{1-n} \quad (2)$$

şeklinde gösterilir. Dominantlık zayıf ise (2)'deki eşitsizlik, eşitlik halini alır [Schmitt, 1973; Ayan, 1979; Benning, 1974]. Jeodezik NDS'de geçerli olan köşegen dominantlığı pozitif definitlik için de yeterli bir göstergedir.

Lukacs [1971] NDS'ye ilişkin analizlerinden şu bulguları sıralamıştır:

1. NDS'nin ana köşegen elemanlarının hepsi daima pozitifdir. Ana köşegen dışındaki elemanların işareti pozitif veya negatif olabilir,
2. Ana köşegen elemanları, ana köşegen dışındaki elemanların mutlak değerlerinin yaklaşık on katı büyüklüğündedir,
3. Ana köşegen elemanlarının büyüklükleri en çok  $10^3$  çarpanı kadar yani (10 – 1000) birbirlerinden farklıdır.

Normal denklem bilinmeyenlerinden bir kaçının indirgenmesinden sonra elde edilecek yeni denklemlerde normal denklem özelliklerini taşır [Ulsoy 1974].

### 3. JEODEZİK NDS ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

(1) şeklindeki normal denklem sisteminin bilgisayar ortamında çözümü için kullanılacak yöntemin ve/veya yöntemlerin seçimindeki kriterlerden biri, çözüm vektörünün eldesinde yapılan aritmetik işlem sayısıdır. Diğer bir kriter ise, yuvarlatma hatalarından az etkilenmesi ve aranan büyüklüklerin güvenilir bir şekilde elde edilmesidir. Elemanları  $\underline{N} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  ve  $\underline{n} \in \mathfrak{R}^n$  şeklinde olan (1) sisteminin çözümünün varlığı ve tekiliğinin garanti altına alınmasının koşulları:  $\underline{N}$ 'nin tersinin alınabilir ve  $\text{rank}(\underline{N}) = n$  olmasıdır. (1) sisteminin çözümü Cramer kuralına göre;

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det(\underline{N})}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki;  $\Delta_j$ ,  $\underline{N}$ 'nin  $j$ . sütunu elemanları yerine sağ taraftaki  $\underline{n}$  vektörünün yazılmasıyla oluşturulan matrisin determinant değeridir. (3) formülü pratikte determinant değerinin hesabındaki işlem adedinin çokluğundan dolayı tercih edilmez. Çünkü bilinmeyenlere ulaşmak için  $(n+1)!$  kadar aritmetik işlemin yapılması zorunludur. Bu olumsuz durum gözönüne alınarak Cramer kuralına alternatif yöntemler geliştirilmiştir [Quarteroni ve diğ., 2002]. Eğer (1) sisteminin çözümü için adımların sayısı sonlu ise direkt yöntemler, teorik olarak çözüm adımlarının sayısı sonsuz ise iteratif yöntemler olarak adlandırılır.

#### 3.1 Gauss Eliminasyon Yöntemi

Direkt yöntemlerden Gauss eliminasyon yöntemine göre (1) sistemi çözülürken katsayılar matrisi  $\underline{N}$ , bilinmeyenlerin en son denklemden sadece son bilinmeyen kalacak şekilde sistematik olarak yok edilmesi sonucunda bir  $\underline{U}$  üst üçgen matrise,  $\underline{n}$  ise  $\underline{b}$  gibi bir vektöre dönüştürülür.

$$\begin{array}{c} \underline{N} \underline{x} = \underline{n} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \underline{U} \underline{x} = \underline{b} \end{array}$$

Bilinmeyenler ise  $x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left( b_{ii} - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right)$ ,  $i = n-1, \dots, 1$  biçiminde hesaplanır. Gauss yönteminde n adet bilinmeyeni çözmek için gereken aritmetik işlem sayısı  $4n^3/3$  dur [Press ve diğ., 1999].

### 3.2 Cholesky Yöntemi

Bu yöntemde  $\underline{N} = \underline{U}^T \underline{U}$  alt ve üst üçgenlerin çarpımı şekline dönüştürülür. Alt ve üst üçgen elemanları ise

$$u_{ij} = \left( n_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} u_{ik} u_{jk} \right) / u_{jj}, \quad j = 1, \dots, i-1, \quad u_{ii} = \sqrt{\left( n_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ik}^2 \right)}$$

şeklinde hesaplanır. İvers hesabı,

$$\begin{array}{l} \underline{U}^T \underline{U} \underline{x} + \underline{n} = \underline{0}, \underline{U} \underline{x} = \underline{y} \\ \underline{U}^T \underline{y} + \underline{n} =, \quad \underline{y} = -(\underline{U}^T)^{-1} \underline{n} \\ \underline{N}^{-1} = \underline{U}^{-1} (\underline{U}^{-1})^T = \underline{Q} \end{array}$$

şeklinde yapılır. Bilinmeyenlerin hesabı ise

$$y_k = - \left( n_k + \sum_{i=1}^{k-1} U_{ik} y_i \right) / U_{kk}, \quad x_i = \left( y_i - \sum_{k=1}^{i-1} U_{ik} x_k \right) / U_{kk}$$

eşitlikleriyle bulunur.

### 3.3 SVD Tekil Çarpanlara Ayırma Yöntemi

Bu yöntemde  $\underline{N}$  katsayılar matrisi  $\underline{N} = \underline{U} \underline{V} \underline{W}^T$  şeklinde çarpanlara ayrılır. Burada  $\underline{U}$  alt üçgen matris,  $\underline{V}$  köşegen matris ve  $\underline{W}^T$  ise üst üçgen matrisdir.  $\underline{N}$  simetriklik özelliğinden dolayı  $\underline{U} = \underline{W}$  olur. Bu durumda  $\underline{N} = \underline{U} \underline{V} \underline{U}^T$  şekline dönüşür. (1) sistemine ait katsayılar matrisi çarpanlarına ayrıldıktan sonra, sistemin çözümü;

$$\underline{U} \underline{V} \underline{U}^T \underline{x} = \underline{n}, \quad \underline{V} \underline{U}^T \underline{x} = \underline{y}, \quad \underline{U}^T \underline{x} = \underline{z}$$

şeklinde gerçekleştirilir. Bilinmeyenler vektörünün çözümü için gereken aritmetik işlem sayısı  $(n^2 + n)$  kadardır.

### 3.4 QR Yöntemi

Bu yöntemde ise (1) sisteminin  $\underline{N}$  matrisi  $\underline{N} = \underline{Q}\underline{R}$  şeklinde çarpanlara ayrılır. Burada  $\underline{R}$  üst üçgen matris,  $\underline{Q}$  ise ortogonal bir matristir.  $\underline{Q}^T \underline{Q} = \underline{I}$  ve  $\underline{Q}^T = \underline{Q}$  dir. Bilinmeyenler vektörü,

$$\underline{x} = \underline{R}^{-1}(\underline{Q}^T \underline{n})$$

şeklinde elde edilir.

Yukarıda özellikleri ana hatlarıyla verilen bu üç metoda ait ayrıntılı bilgi için sayısal matematik kitaplarına başvurulabilir.

(1) sisteminin norm hesabı için önce  $\underline{N}$  'nin determinanı,

$$t_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n n_{ij}^2} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n = \overline{1-n}$$

şeklinde normalize edilir. Daha sonra  $\underline{N}$  normu,

$$\|\underline{N}\| = \begin{vmatrix} \frac{n_{11}}{t_1} & \frac{n_{12}}{t_1} & \dots & \frac{n_{1n}}{t_1} \\ \frac{n_{21}}{t_2} & \frac{n_{22}}{t_2} & \dots & \frac{n_{2n}}{t_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n_{n1}}{t_n} & \frac{n_{n2}}{t_n} & \dots & \frac{n_{nn}}{t_n} \end{vmatrix} = \frac{|\underline{N}|}{t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n}$$

şeklinde hesaplanır.

Eğer  $\|\underline{N}\| \ll 1$  ise (1) sistemi tekildir. Yani,  $|\underline{N}| = 0$  dır. Bu durumda yuvarlatma hatalarının çözüm kümesi elemanları üzerindeki olumsuz etkisini azaltmak için bilgisayarda kullanılan kayan nokta aritmetiğine göre, ondalık rakam sayısı yani dijital sayısı için ayrılan yer artırılarak gerçek çözüm elemanlarına yakın elemanlar elde edilir. Ayrıca (1) sisteminin  $\underline{N}$  ve  $\underline{n}$  elemanlarında yapılacak küçük değişiklikler,  $\underline{n}$  çözüm kümesi elemanlarında büyük değişikliklere neden oluyorsa,  $\underline{N}$  ve  $\underline{n}$  elemanlarının eldesin de kullanılan jeodezik ölçülerin duyarlılığı yapılması gerektiği gibi, bu ölçülerden birinde yapılacak duyarlılık hatası çözüm kümesi elemanlarının gerçek değerlerinden çok farklı olmasına neden olabilir.

## 4. ÖRNEK IGS AĞI ÜZERİNDE YÖNTEMLERİN UYGULANMASI

Bahsedilen yöntemleri karşılaştırmak amacıyla Şekil 1'de verilen 300 adet yeryüzüne dağılmış noktadan oluşmuş bir kenar ağı kullanılmıştır. Ağ, IGS (International GPS

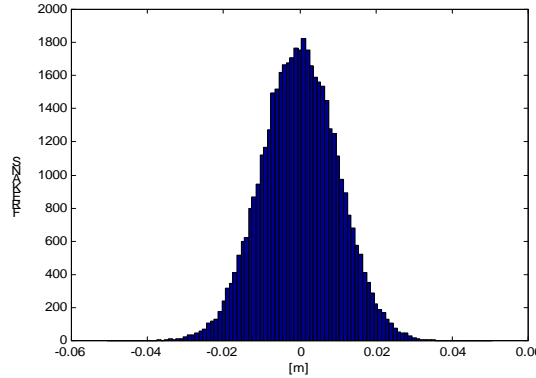
Service) adlı kuruluş tarafından işletilmektedir. Bu ağda 30 s aralıklarla GPS gözlemleri (bazı istasyonlarda GPS'in Rus eşdeğeri GLONASS gözlemleri de) toplanmaktadır.

Ağda noktalar arasındaki bütün kenarların ölçüldüğü varsayılmış ve bu amaçla istasyonların yaklaşık koordinat değerlerinden bu kenarlar hesaplanmıştır. Normal denklem sisteminin doğruluğunu kontrol etmek için bu yaklaşık kenarlara normal dağılımlı bir raslantısal vektör eklenerek ölçüler simule edilmiştir (Şekil 2). Ağda en kısa kenar 2 km en uzun kenar ise 12700 km civarında olup, yeryüzü yarıçapının yaklaşık iki katıdır. Ağdaki tüm ölçülerin sayısı 44850 adettir. Stokastik modelin oluşturulmasında sabit istasyonlarla 24 saatlik gözlem ile günümüzde elde edilen doğruluk  $m_s = 3 \text{ mm} + 1.5 \text{ ppb}$  alınmıştır. Böylece ölçüler ve bu ölçülere ait varyans-kovaryans matrisi olan bir sistem elde edilmiş olup, Gauss–Markoff modeli uygulanabilir.



Şekil 1. Uygulama Ağı

Normal denklemlerin oluşturulmasında karşılaşılan en büyük problem; düzeltme denklemlerindeki katsayılar matrisi  $A$  ile kendisinin transpozesi olan  $A^T$  nin çarpımı olmuştur. Bu;  $44850 \times 900$  boyutlu iki matrisin çarpımı demektir ki, salt çarpım sonucunda bütün işlemler yapırsa ve elde edilecek normal denklem matrisinin simetrik olma özelliği de dikkate alınırsa  $n \times u \times (u + 1) / 2$  formülüyle yaklaşık 18 milyar çarpma işlemi yapılmasını gerektirir. Bunun yanında yapılacak toplama işlemi de  $(n - 1) \times u \times (u + 1) / 2$



Şekil 2. Yaklaşık Kenarlara Eklenen Değerlerin Dağılımı

bağıntısıyla hesaplanırsa, yapılacak aritmetik işlem sayısı yaklaşık 36 milyar olacaktır. Bir başka deyişle kullanılan bilgisayar 36 milyar flop operasyon yapacaktır (burada flop türetme bir kelime olup ( Floating Point ) informatik alanında sıkça kullanılmaktadır). Normal denklemleri kısa sürede elde edebilmek için  $\underline{A}$  katsayılar matrisinin özelliğinden yararlanılmıştır. Şekil 3'den de görüleceği üzere  $A$  katsayılar matrisi her satırında 6 eleman içermektedir. Bu matrisin transpozesi ile çarpımında bir noktaya ait 6 eleman için (aslında 9'dur ancak matrisin simetriklik özelliğinden yalnızca üst üçgen kısmı düşünülürse 6'ya iner) 3 çarpım yapılacaktır. Bu noktanın, diğer noktalarla olan ilişkisini ifade etmek için ise tek çarpım yeterli olmaktadır.  $\underline{A}$ 'nin sıfırdan farklı satırları,  $\underline{A}^T$ 'nin ise sıfırdan farklı sütunları vektör şeklinde depolanmıştır.  $\underline{A}$  matrisinin bu özelliği kullanılarak geliştirilen bir algoritma vasıtasıyla gerekli aritmetik işlem sayısı yaklaşık 144000'e düşmektedir. Bu da 36 Milyar işlemden 250000 kat daha azdır.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & \dots \\ & & & & & & \dots & & & & & & \dots \end{bmatrix}$$

Şekil 3. Katsayılar matrisinin sembolik gösterimi

3. Bölümde kısaca bahsedilen üç yöntemin çözümlerinin yapılması amacıyla yukarıdaki algoritma kullanılmak suretiyle Şekil 1'deki ağa ait NDS oluşturulmuştur. Uygulama MATLAB Makro dili kullanılarak PII 350 MHz işlemcili bir bilgisayarda yapılmıştır. Elde edilen NDS matrisi rank defektine sahip olup bu sayı 6'dır. Çözümün yapılabilmesi için NDS'nin sıfır uzayı  $\underline{G}$  ile genişletilerek (1) sistemi aşağıdaki gibi elde edilir. Burada serbest ağ çözümü uygulandığından  $\underline{N}$ 'nin sıfır uzayından bahsedilmektedir.

$$\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{N} & \underline{G} \\ \underline{G}^T & \underline{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{A}^T \underline{P} \underline{l} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

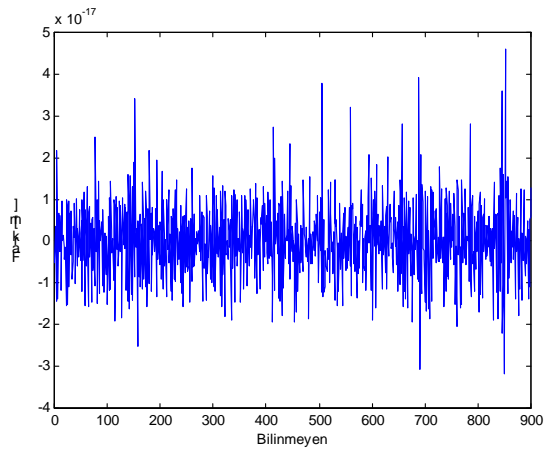
Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafının aynen uygulanması halinde indirgemedeki sistemin rank düşüklüğü değişmediğinden, yani genişletilmiş sistemde lineer bağımlı satır ve sütunların olması nedeniyle indirgeme mümkün olmamaktadır. Sistemin rank defekti ancak bir toplama veya çıkarma işlemi ile giderilebilir. Bu durumda invers alma işlemi, defekti olmayan  $\underline{N} + \underline{G}^T \underline{G}$  için yapılmalıdır.

## 5. SONUÇLAR

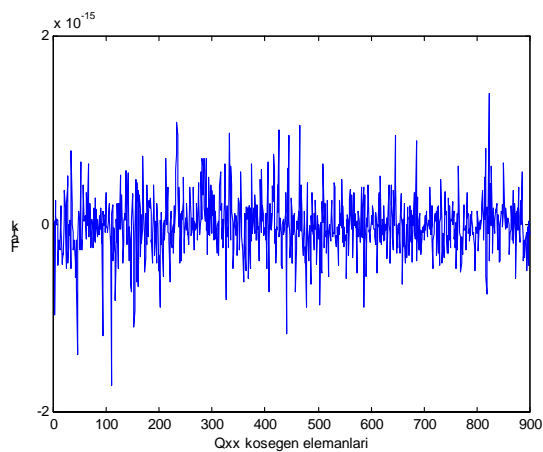
Çalışmada ele alınan örnek bir ağ için direkt yöntemlerin değişik çözüm yöntemleri karşılaştırılmıştır. Çözümler zaman açısından farklılıklar göstermektedir. Çözümlerin doğrulukları, Gauss'un indirgeme metodu kullanılarak karşılaştırılmıştır. Her üç çözüm de yuvarlatma hatası mertebesinde sonuçlar üretmiştir (Bkz. Şekil 4). Şekil 5'te

Cholesky ve SVD yöntemleriyle hesaplanan bilinmeyenlere ait kofaktörler matrisinin farkları görülmektedir. Yalnız katsayılar matrisinin dijit sayısının 11'in altında alınması durumunda elde edilen NDS'nin lineer bağımlı satır ya da sütunların sayısı azalmakta bu da sistemin çözümünü olanaksız kılmaktadır. Maksimum kenar uzunluğu 4 km olan yerel bir ağda aynı durum dijit sayısının 7'den az olması durumunda da gözlenmiştir. Dolayısıyla minimum dijit sayısının bu şekilde değişim göstermesinin, ağın boyutuyla ilgili olduğu düşünülmektedir.

SVD çözüm yöntemiyle, diğer iki yönteme nazaran sonuçlar daha uzun sürede elde edilmesine karşın, ağa ilişkin global doğruluk ölçütü, sistemin kondisyonunun hesabı gibi büyüklüklerin elde edilmesinde kaçınılmaz metoddur. Cholesky metodunun kendisi matematikte sık ancak jeodezide nadir karşılaşılan pivotlama stratejisine sahiptir ve bu metodla Tablo 1'den de görüleceği üzere diğer metodlara göre en kısa sürede sonuç üretmektedir.



Şekil 4. Gauss ve Cholesky yöntemleriyle elde edilen bilinmeyen vektörünün karşılaştırılması



Şekil 5. Cholesky ve SVD yöntemleriyle elde edilen kofaktörler matrisinin karşılaştırılması

Tablo 1. Farklı yöntemlerin çözüm süreleri (sn biriminde)

Yöntem	Çarpanlara Ayırma	Ters Alma	Toplam
SVD	192.8	47.9	240.7
QR	29.9	30.8	60.7
Cholesky	3.7	46.8	50.5
Gauss	-	-	5170.0

## 6. KAYNAKLAR

- Ayan, T., Jeodezik büyük denklem sistemlerinin çözümünde yuvarlatma hatalarının etkileri, Mühendislikte nümerik yöntemler semineri, İTÜ, İstanbul, 1979.
- Benning, W., Numerischer Vergleich von iterativen und direkten Verfahren zur Auflösung linearer inhomogener Gleichungssysteme, Mitt. Aus dem Inst. für Theor. Geodaesie, Nr. 27, Bonn, 1974.
- Lucaks, T., Auflösung von Normalgleichungssystemen mit elektronischen Computern, FIG-Kongress, Wiesbaden, 1971.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, Oxford, 1999.
- Quarteroni, A., Sacco, R., Saleri, F., Numerische Mathematik I, Springer, Berlin, 2002.
- Schmitt, G., Speichertechnische und numerische Probleme bei der Auflösung grosser geodaetischer Normalgleichungssysteme, Veröff. der DGK, Reihe C, 195, München, 1973.
- Ulsoy, E., Dengeleme Hesabı, En küçük kareler metodu İDMMA yayınları 87, İstanbul, 1974.